éq. différentielle de 1ère ordre : $ay' + b = C$ $(a \neq 0)$

a, b, C sont des fonct. continues sur I

y solution de (E) ssi y dérivable sur I

1ère étape : Chercher les solution générales y_0 de (E_0) : $ay' + b = 0$

2ème étape : trouver une solution particulières y_p de (E) par la variation de la Constante.

enfin $\boxed{y = y_0 + y_p}$

Equation de Bernoulli :

(B) : $y' + ay = by^m$ $m \notin \{0, 1\}$

- si $m \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ il n'y a pas de condit° sur la fonct y.
- si $m \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ on doit prendre $y > 0$

On pose $z = y^{1-m} \Leftrightarrow z' = (1-m)\frac{y'}{y^m}$

y solut° de $(B) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^m} + a\frac{y}{y^m} = b$

$\Leftrightarrow z$ solut° de (E_2) : $\frac{1}{1-m} z' + az = b$

Equation de Riccati :

(R) : $y' = ay^2 + by + C$

Pr resoudre une éq diff de Riccati, il est necessaire de connaître une solut° particulière y_p.

La solut° générale de (R) : $y = y_p + \frac{1}{z}$

$$\begin{cases} y = y_p + \frac{1}{z} \text{ solut° de } (R) \\ y_p \text{ solut° particulière de } (R) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_p' - \frac{z'}{z^2} = ay_p^2 + 2a\frac{y_p}{z} + \frac{a}{z^2} + by_p + \frac{b}{z} + C \quad (1) \\ y_p' = ay_p^2 + by_p + C \quad (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow$

(E_2) : $z' + (2ay_p + b)z + a = 0$

éq. diff. du second ordre : (E) : $ay'' + by' + Cy = d(x)$ $\quad a, b, C \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

1ère étape : determiner les solutions generales de (E_0) : $ay'' + by' + Cy = 0$

(E_c) : $ar^2 + br + C = 0$; $\Delta = b^2 - 4aC$

- $\Delta > 0$ $\begin{cases} r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow y_0(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ / $A, B \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$ $\{r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y_0(x) = (Ax + B)e^{rx}$ / $A, B \in \mathbb{R}$
- $\Delta < 0$: $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta \end{cases} \Rightarrow y_0(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

2ème étape : "Principe de Superposition"

(E) : $ay'' + by' + Cy = f$

si $f = f_1 + f_2$, on cherche une solut° particulière $y_p = y_1 + y_2$ avec :
- y_1 solution de $ay'' + by' + Cy = f_1$
- y_2 solution de $ay'' + by' + Cy = f_2$

3ème étape : Determination de y_p :

- si $f = C^{te}$ donc $y_p = C^{te}$ à determiner

- si $f(x) = P(x)$ $d°P = n$

$$y_p(x) = \begin{cases} - Q(x) \text{ ; } d°P = d°Q \text{ si zéro n'est pas racine de } (E_c) \\ - xQ(x) \text{ ; } d°P = d°Q \text{ si zéro racine simple de } (E_c) \\ - x^2Q(x) \text{ ; } d°P = d°Q \text{ si zéro racine double de } (E_c) \end{cases}$$

- si $f(x) = e^{kx}P(x)$ $k \in \mathbb{R}$, $d°P = n$

$$y_p(x) = \begin{cases} - Q(x)e^{kx} \text{ : } k \text{ n'est pas racine de } (E_c) \\ - xQ(x)e^{kx} \text{ : } k \text{ racine simple de } (E_c) \\ - x^2Q(x)e^{kx} \text{ : } k \text{ racine double de } (E_c) \end{cases}$$

- si $f(x) = \alpha\cos wx + \beta\sin wx$
  - si iw racine de (E_c), alors : $y_p(x) = x(A\cos wx + B\sin wx)$
  - si iw n'est pas racine de (E_c) : $y_p(x) = A\cos wx + B\sin wx$

- si $f(x) = P(x)\cos wx$, $f(x) = P(x)\sin wx$
  - si iw racine de (E_c) : $y_p(x) = x(Q(x)\cos wx + R(x)\sin wx)$.
  - si iw n'est pas racine de (E_c) : $y_p = (Q(x)\cos wx + R(x)\sin wx)$